

## SUR UNE CARACTERISATION STATISTIQUE SIMPLE DES EXTREMES

Gane Samb Lô et Aliou Diop  
Université de Saint-Louis  
BP. 234, Saint-Louis, Sénégal

**Abstract.** — We present two ways of characterizing the extreme value domain of attraction. We first reduce the characterizing class of Lô (1992) from nine to two fixed statistics. Next, we introduce a statistical process depending on a continuous time parameter whose any couple of margins yields a complete characterization of the extremes. The existence of such a continuous parameter conducts to a great variability in finding high speed convergence statistics. Related simulations results are given.

Nous présentons ici deux manières empiriques de caractériser les domaines d'attraction des extrêmes d'échantillons aléatoires par une classe minimale de statistiques. D'abord la classe caractérisante de Lô (1992) de neuf statistiques est ramenée à deux. Ensuite, un processus statistique de paramètre continu, dont chaque couple de marges caractérise entièrement les extrêmes, est proposé. L'existence du paramètre continu permet une grande souplesse en vue d'applications statistiques illustrée par des résultats de simulations.

### 1. INTRODUCTION

Soit  $X, X_1, X_2, \dots$  une suite de variable aléatoires (v.a) indépendantes et identiquement distribuées selon  $\mathbb{P}(X \leq x) = F(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  et  $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1$ . La connaissance de la limite de  $X_{n,n} = \max(X_1, \dots, X_n)$  ainsi que les conditions nécessaires et suffisantes de la validité de cette loi limite jouent un rôle crucial dans la théorie des valeurs extrêmes ainsi que ses applications [voir Resnick (1987), Galambos(1985), De Haan (1970), Tiago de Oliveira (1983), Mason (1982), etc...].

Rappelons que  $X_{n,n}$  est dit *attiré par une v.a Z* non dégénérée, où  $F \in D(H)$  avec  $H(\cdot) = \mathbb{P}(Z \leq \cdot)$ , si et seulement si il existe deux suites de réels telles que

$$(1.1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{(X_{n,n} - b_n)/a_n \leq x\} = H(x).$$

Il est bien établi depuis Gnedenko (1943) que si (1.1) est vraie, alors  $H$  ne peut être que l'un des trois types suivants.

$$\begin{aligned}\Lambda(x) &= \exp(-e^{-x}), x \in \mathbb{R}; \\ \varphi_\gamma(x) &= \exp(-x^{-\gamma}), x \in \mathbb{R}_+, \gamma > 0; \\ \psi_\gamma(x) &= \exp((-x)^{-\gamma}), x \in \mathbb{R}_-, \gamma > 0.\end{aligned}$$

Dans la terminologie usuelle de la théorie des valeurs extrêmes, les trois types extrêmes ci-dessus sont dénommés type I, type II et type III. Aussi, les trois domaines sont dénommés *domaine d'attraction de Gumbel, de Fréchet ou de Weibull*. Dans le dernier cas, il s'agit d'un abus de langage car  $\psi_\gamma$  n'est pas du type de Weibull. Mais, en valeurs extrêmes, seuls les maxima sont étudiés, les résultats pour les minima se déduisant des résultats obtenus pour les maxima grâce à la transformation linéaire  $x \rightarrow -x$ . Les trois types limites obtenus pour les maxima et les minima correspondent grâce cette transformation. Ainsi,  $\psi_\gamma(-x)$ , qui est bien une distribution de Weibull, est le troisième type extrême des minima. Selon Mann (1983), cette loi extrême a d'abord été découverte par Fisher et Tippet (1928) et ensuite retrouvée par Weibull (1939).

Des résultats de discrimination de ces trois types et d'estimation des paramètres associés fondés sur des lois limites existent dans Tiago de Oliveira (1983), Dekkers et al. (1989) et encore plus récemment Hasofer et Wang (1992). Il faut signaler que dans l'approche de ce dernier article, le pas  $k$  reste fixé. Dans ce cas de figure, il est certain que les lois limites ne peuvent être normales. Il serait intéressant de les étudier avec un pas  $k \rightarrow \infty$  et voir si la normalité asymptotique est obtenue et de comparer les performances avec celles correspondantes à un pas fixe.

D'une manière générale, l'estimation des domaines d'attraction et des queues de distributions a reçu ces dernières années une grande attention. Mais, c'est surtout l'estimation de l'index  $\gamma$  dans le cas du domaine d'attraction de Fréchet, qui a fait l'objet de la plus grande considération notamment à cause des multiples applications (Finances, Assurances, Sociologie, etc.). Voir Hill (1975) et Tiago de Oliveira Ed. (1983) pour une vue large de ces domaines d'applications. Csörgö (1984) cite plus de soixante articles consacrés à l'estimation de  $\gamma$ . Parmi les estimateurs existants citons ceux de Hill (1975), de de Haan et Resnick (1980), de Csörgö-Deheuvels-Mason (1987), Lô (1991), etc... Davis et Resnick (1984) d'une part et Smith (1987) d'autre part ont quant à eux servi de précurseurs dans l'utilisation de ces statistiques pour estimer les autres domaines d'attraction. Ainsi les alternatives des théorèmes limites obtenus pour les estimateurs de Hill (1975) par Csörgö et Mason (1985) et de De Haan et Resnick (1980) par les auteurs eux-mêmes sont obtenues dans Lô (1986), Lô (1991),

Dekkers et al. (1989) pour tous les domaines.

Jusqu'à l'article de Lô (1992), seule la discrimination des trois domaines était considérée. Le problème de la caractérisation complète des extrêmes à partir d'une classe de statistiques entièrement calculées dès la donnée de l'échantillon a été posé et résolu dans cet article. La classe qui y est proposée contient neuf (9) statistiques dont la normalité asymptotique a été obtenue.

Notre but est de montrer, d'abord, que les deux principales statistiques de cette classe suffisent largement à la caractérisation. En même temps, une alternative est aussi proposée. Celle-ci a l'avantage de permettre, par le biais de paramètres continus, d'optimiser les convergences des statistiques considérées.

Introduisons ces notations avant d'exposer nos résultats. Soit  $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$  la statistique d'ordre associée à  $X_1, \dots, X_n$  et soit  $Y_{1,n} \leq \dots \leq Y_{n,n}$  la statistique d'ordre associée à  $Y_i = \log X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x \in \mathbb{R}$  et  $\delta_{ij} = \mathbb{I}_{(i \neq j)}$  désigne le symbole de Kronecker. Etant donnés trois entiers  $0 < \ell < k < n$ , définissons

$$A_n(k, \ell) = \frac{1}{k} \sum_{i=\ell+1}^k \sum_{j=i}^k j(1 - \delta_{ij}/2)(Y_{n-j+1,n} - Y_{n-j,n})(Y_{n-i+1,n} - Y_{n-i,n}),$$

$$T_n(2, k, \ell) = \frac{1}{k} \sum_{i=\ell+1}^k i(Y_{n-i+1,n} - Y_{n-i,n}) \quad \text{et} \quad T_n(1, k, \ell) = T_n(2, k, \ell)/A_n(k, \ell)^{1/2}.$$

$(A_n(k, \ell), T_n(2, k, \ell))$  est le couple extrait de la famille de Lô (1992). Nous montrerons dans le théorème 1 qu'il caractérise le maximum  $X_{n,n}$ . Nous considérerons aussi le processus statistique suivant, avec les mêmes hypothèses sur  $k$  et  $\ell$ .

$$\{S_n(\tau), 0 < \tau < \infty, n \geq 1\} = \{(n/k)^\tau \sum_{i=\ell+1}^k (i/n)^\tau (Y_{n-i+1,n} - Y_{n-i,n}), \\ 0 < \tau < \infty, n \geq 1\}.$$

Il est loisible de vérifier que  $S_n(1) = T_n(2, k, \ell)$ .

Dans le reste de l'article, nous exposons nos résultats dans la section 2, donnons les preuves dans la section 3 et exposons les résultats des simulations dans la section 4.

$\Gamma$  désignera la réunion des domaines d'attraction extrême.

## 2. LES RESULTATS.

THÉORÈME 1. — Soit  $F \in \Gamma$ ,  $k = [n^\alpha]$  et  $\ell = [n^\beta]$  avec  $0 < \beta < \alpha < 1$ . Alors il existe  $c = (c_1, c_2) \in [1, \sqrt{2}] \times [0, +\infty[$  tel que

$$(2.1) \quad \mathbf{T}_n = (T_n(1, k, \ell), T_n(2, k, \ell)) \rightarrow c = (c_1, c_2), \text{ p.s. quand } n \rightarrow \infty.$$

De plus,

- (i)  $F \in D(\Lambda)$  ssi (2.1) a lieu avec  $c = (1, 0)$
- (ii)  $F \in D(\varphi_\gamma)$ ,  $\gamma > 0$ , ssi (2.1) a lieu avec  $c = (1, 1/\gamma)$
- (iii)  $F \in D(\psi_\gamma)$ ,  $\gamma > 0$ , ssi (2.1) a lieu avec

$$1 < c_1 < \sqrt{2}, c_2 = 0 \text{ et } \gamma = -2 + c_1^2/(c_1^2 - 1).$$

THÉOREME 2.. — Soit  $F \in \Gamma$ ,  $k = [n^\alpha]$  et  $\ell = [n^\beta]$  avec  $0 < \beta < \alpha < 1$ . Alors, pour tout  $\tau > 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $\tau \neq \rho$ , il existe  $(s_1, s_2) \in [0, \infty[ \times ]0, \infty[$  tel que

$$S_n = (S_n(\tau), S_n(\tau)/S_n(\rho)) \rightarrow s = (s_1, s_2), \text{ p.s. quand } n \rightarrow \infty.$$

De plus,

- (i)  $F \in D(\Lambda)$  ssi (2.2) a lieu avec  $s = (0, \rho/\tau)$ .
- (ii)  $F \in D(\varphi_\gamma)$ ,  $\gamma > 0$ , ssi (2.2) a lieu avec  $s = (1/(\tau\gamma), \rho/\tau)$ .
- (iii)  $F \in D(\psi_\gamma)$ ,  $\gamma > 0$ , ssi (2.2) a lieu avec  $s = (0, (\gamma\rho + 1)/(\gamma\tau + 1))$ .

**Remarque 1.** Il est évident dans le théorème 2 que les paramètres  $\tau$  et  $\rho$  peuvent avoir une influence directe sur les vitesses de convergence de  $S_n$ . Ceci est illustré par les simulations ci-dessous. L'impact du choix du paramètre sur la normalité asymptotique est davantage intéressant. Ce travail est en cours.

**Remarque 2.** Sous l'hypothèse  $F \in \Gamma$ , les limites dans les deux théorèmes ont lieu en probabilité dès que  $\ell/k \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  (voir Lô (1991)) et il sera montré dans les preuves qu'elles ont lieu presque partout si

$$(K) \quad k/n \rightarrow 0, \exists \delta > 0, k/(\log n)^\delta \rightarrow \infty \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Aussi, il apparaîtra dans les preuves que la caractérisation a lieu si les limites ont lieu seulement en probabilité.

### 3. DEMONSTRATIONS.

Les démonstrations des deux théorèmes sont heureusement très proches. Il nous suffira de démontrer, par exemple, le théorème 1 en détails. Ensuite, nous exposerons les grandes lignes de la preuve du théorème 2.

*a - Démonstration du théorème 1.*

*a-1 : Preuve des implications directes.*

Posons  $G(\cdot) = \mathbb{P}(Y_1 \leq \cdot)$  et soit  $Q(\cdot) = G^{-1}(\cdot)$ , l'inverse généralisée de  $G$ . Définissons  $G_n(x) = \#\{j, 1 \leq j \leq n, Y_j \leq x\}/n$ , la fonction de répartition (f.r.) empirique basée sur l'échantillon  $Y_1, \dots, Y_n$ . Soit aussi  $U_n$  la f.r. empirique fondée sur un échantillon aléatoire issu d'une loi uniforme sur  $(0, 1)$ . Nous assumons sans perte de généralités ces représentations :

$$(3.1) \quad \{Y_{n-j+1,n}, 1 \leq j \leq n, n \geq 1\} = \{Q(1 - U_{j,n}), 1 \leq j \leq n, n \geq 1\}$$

$$(3.2) \quad \{1 - G_n(x), x \in \mathbb{R}, n \geq 1\} = \{U_n(1 - G(x)), x \in \mathbb{R}, n \geq 1\}.$$

Soit  $u_n = U_{k+1,n}$ ,  $v_n = U_{\ell+1,n}$ ,  $x_n = Q(1 - u_n)$ ,  $z_n = Q(1 - v_n)$ ,  $\tilde{u}_n = 1 - G(x_n)$ ,  $\tilde{v}_n = 1 - G(z_n)$ . Commençons par remarquer que

$$(3.3) \quad \forall F \in \Gamma, 1 - G(Q(1 - u)) \sim u \text{ quand } u \rightarrow 0.$$

Ceci entraîne

$$(3.4) \quad \tilde{v}_n/\tilde{u}_n \sim \ell/k \rightarrow 0, \tilde{u}_n \sim U_{k+1,n} \sim k/n, \tilde{v}_n \sim U_{\ell+1,n} \sim \ell/n, \text{ p.s., quand } n \rightarrow \infty.$$

Nous avons besoin des notations supplémentaires suivantes.

$$y_0 = \sup\{x : G(x) < 1\},$$

$$R(x, z, G) = \int_x^z \frac{1 - G(t)}{1 - G(x)} dt, R(x, y_0, G) := R(x, G) \text{ avec } x \leq z \leq y_0,$$

$$W(x, y, G) = \int_x^z \int_y^z \frac{1 - G(t)}{1 - G(x)} dt dy, W(x, y_0, G) := W(x, G) \text{ avec } x \leq z \leq y_0.$$

Lorsque la mention de la f.r.  $G$  est absente dans l'écriture de  $R(\cdot)$  ou de  $W(\cdot)$ , il est sous-entendu qu'elle est égale à  $F(e^x)$ .

Commençons par noter que

$$(3.5) \quad T_n(2, k, \ell) = \frac{n}{k} \int_{x_n}^{z_n} 1 - G_n(t) dt; \quad A_n = \frac{n}{k} \int_{x_n}^{z_n} \int_y^{z_n} 1 - G_n(t) dt dy.$$

En utilisant (3.1), (3.2), (3.3), et (3.4), il s'en suit que

$$(3.6) \quad T_n(2, k, \ell) = R(x_n, z_n)(1 + O(1)) + \frac{n}{k} \int_{x_n}^{z_n} \{U_n(1 - G(t)) - (1 - G(t))\} dt.$$

Afin de noter que le second terme de (3.6), que nous désignons par  $R_n(1)$ , tend vers zéro, rappelons le résultat suivant.

LEMME 1 (Einmahl-Mason (1988)). — Si  $(K)$  a lieu, et si  $0 < \nu < 1/2$ , alors, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left( \frac{n}{k} \right)^\nu \left( \frac{n}{\log \log n} \right)^\nu \sup_{0 < t < k/n} (U_n(t) - t)/(t^{1/2-\nu}) < \infty, \text{ p.s.}$$

Rappelons aussi qu'il est bien établi que si  $G \in D(\Lambda) \cup D(\psi)$  alors  $1 - G$  est équivalente à une fonction continue et strictement croissante quand  $x \rightarrow y_0$ . En suivant Dekkers et al.(1989), on peut choisir  $a$ ,  $0 < a < \delta/(2(1 + \delta))$ ,  $0 < \eta < \delta/(2(1 + \delta)) - a$ ,  $\nu = 1/2 - a - \eta$ . En appliquant le lemme 1 avec ces choix, et en faisant le changement de variable  $1 - G(t) = s$  dans  $R_n(1)$  grâce à la remarque ci-dessus, on a  $R_n(1) = O((k/n)^{1-a}) = O(1)$ , quand  $n \rightarrow \infty$ . Les mêmes méthodes étant reductibles pour  $A_n$ , on obtient sous (K), p.s. quand  $n \rightarrow \infty$ ,

(3.7)

$$T_n(2, k, \ell) = R(x_n, z_n)(1 + O(1)) + O(1), \quad A_n(k, \ell) \sim W(x_n, z_n)(1 + O(1)) + O(1).$$

A cette étape, nous énonçons le lemme simple suivant.

LEMME 2. — Soit  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(a'_n)$  et  $(b'_n)$  des suites numériques réelles telles que  $b_n/a_n \rightarrow \chi$ ,  $0 < \chi < \infty$ ,  $\lim a_n$  existe,  $b_n = b'_n + O(1)$  et  $a_n = a'_n + O(1)$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Alors  $b'_n/a'_n \rightarrow \chi$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Preuve.** Evidente.

L'application conjointe à (3.7) du lemme 2, des Théorèmes 2.5.2. et 2.6.1 de De Haan (1970), du fait que  $F \in \Gamma \Rightarrow G \in D(\Lambda) \cup D(\psi)$  et du fait que (K) entraîne les conditions du théorème sur les suites  $k$  et  $\ell$ , complète entièrement la démonstration des implications directes.

*a-2 : Preuve des implications indirectes.*

Cette preuve se fera en deux étapes.

*Première étape.* Elle consiste à montrer que si (2.1) est vraie, alors

$$(3.8) \quad r(u) \rightarrow c_2, \quad r(u)/w(u)^{1/2} \rightarrow c_1, \quad \text{quand } u \rightarrow 0.$$

Signalons tout de suite que pour  $u \downarrow 0$ , on peut trouver des sous-suites  $u_{n_1(u)}$  et  $u_{n_2(u)}$  de  $\{u_n, n \geq 1\}$ ,  $v_{n_1(u)}$  et  $v_{n_2(u)}$  de  $\{v_n, n \geq 1\}$  telles que

$$u_{n_1(u)} < u < u_{n_2(u)}, u_{n_1(u)} \downarrow 0, u_{n_2(u)} \downarrow 0 \text{ et } u_{n_1(u)} \sim u_{n_2(u)} \sim u \text{ quand } u \downarrow 0.$$

$$v_{n_1(u)} < u < v_{n_2(u)}, v_{n_1(u)} \downarrow 0, v_{n_2(u)} \downarrow 0 \text{ et } v_{n_1(u)} \sim v_{n_2(u)} \sim u \text{ quand } u \downarrow 0.$$

Dans tout ce qui suit, nous supposons que  $r(u_n, v_n) \rightarrow_p c_2$  et  $r(u_n, v_n)/w(u_n, v_n)^{1/2} \rightarrow_p c_1$  avec  $0 \leq c_1, c_2 < \infty$ . D'abord, on a

$$(3.9) \quad \lim_{u \rightarrow 0} |Q(1 - u) - Q(1 - v)| = 0 \text{ si } u \sim v \text{ quand } u \rightarrow 0$$

Car si  $v < u$ ,  $u \sim v$ , alors on aura quand  $u$  est suffisamment petit,

$$r(u_{n_1(u)}, v_{n_1(u)}) \geq (u/u_{n_2(u)})r(u, v) \geq (v/u_{n_2(u)})(Q(1-v) - Q(1-u)).$$

D'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup Q(1-v) - Q(1-u) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} r(u_{n_1(u)}, v_{n_1(u)}) = c_2 < \infty$ . D'autre part, on vérifie que

$$\begin{aligned} r(u_{n_1(u)}, v_{n_1(u)}) - r(u_{n_2(u)}, v_{n_2(u)}) &= O(1) \pm \{Q(1 - u_{n_1(v)}) - Q(1 - u_{n_2(u)})\} \\ &\quad \pm (v_{n_1(u)}/u_{n_1(u)})\{Q(1 - v_{n_1(u)}) - Q(1 - v_{n_2(u)})\}. \end{aligned}$$

Donc, puisque  $v_{n_1(u)}/u_{n_1(u)} \rightarrow 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |Q(1 - v_{n_1(u)}) - Q(1 - v_{n_2(u)})| < c_2 < \infty$ , on aboutit à  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(1-v) - Q(1-u) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} Q(1 - u_{n_2(u)}) - Q(1 - u_{n_1(v)}) = 0$ , car  $u_{n_1(v)} \sim u_{n_2(u)}$  quand  $u \rightarrow 0$ . (3.9) est ainsi démontrée. Posons maintenant  $\delta = (1 - \beta)/(1 - \alpha)$ . Notons d'abord que  $\delta > 1$ . Montrons que

$$(3.10) \quad r(u, u^\delta) \rightarrow c_2 \text{ quand } u \rightarrow 0.$$

Soit  $v = u^\delta$ . En utilisant (3.9), on démontre aisément ces deux formules :

$$(3.11a) \quad r(u_{n_2(u)}, u_{n_1(v)}) = O(1) + r(u_{n_2(u)}, v_{n_2(u)}) \rightarrow c_1, \text{ quand } u \rightarrow 0.$$

$$(3.11b) \quad r(u_{n_2(u)}, u_{n_1(v)}) = O(1) + r(u, u^\delta) \rightarrow c_1, \text{ quand } u \rightarrow 0.$$

Enfin, montrons que

$$(3.12) \quad r(u) = r(u, u^\delta) + O(1) \text{ quand } u \rightarrow 0.$$

D'après (3.11b), il existe  $u_0$  tel que :  $\forall u < u_0$ ,  $r(u, u^\delta) < 2 \max(1, c_2) = c_3$ . Posons  $u(j) = \exp(\delta^j u)$ ,  $j \geq 0$ . On a pour  $u < u_0$ ,

$$(3.13) \quad \begin{aligned} 0 \leq r(u) - r(u, u^\delta) &= \sum_{j=1}^{\infty} u(j)r(u(j), u(j+1)) < c_3 u^{\delta-1} \sum_{j=1}^{\infty} u_0^{(\delta^j - 1)\delta} \\ &\leq \text{Const. } u^{\delta-1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

La première partie de (3.8) est prouvée. Avant de traiter l'autre partie, signalons une conséquence utile de (3.12). En effet, nous avons

$$(3.14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup r(u) < \infty \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0, u^\varepsilon Q(1-u) \rightarrow 0 \text{ quand } u \rightarrow 0).$$

*Preuve de (3.14).* Soit  $0 < u_0 < 1$  fixé. Pour tout  $0 < t < u_0$ ,

$$(3.14a) \quad u_0 r(u_0) > \int_{Q(1-u_0)}^{Q(1-t)} 1 - G(s) ds \geq t\{Q(1-t) - Q(1-u_0)\}.$$

D'où  $\lim_{t \rightarrow 0} tQ(1-t) < u_0 r(u_0)$  pour tout  $u_0, 0 < u_0 < 1$ . Donc,

$$(3.14b) \quad \lim_{t \rightarrow 0} tQ(1-t) = 0$$

Faisons  $t = u^2$  dans (3.14a). En appliquant (3.14b), on obtient  $\limsup_{u \rightarrow 0} u^{1/2} Q(1-u) < \infty$ . On obtient par récurrence en posant successivement  $t = u^p, p \in \mathbb{N}$ , que  $\limsup_{u \rightarrow 0} u^{1/p} Q(1-u) < \infty$ . D'où le résultat. Enfin, nous pouvons reconduire les méthodes utilisées pour  $r(u)$  pour obtenir les mêmes propriétés pour  $w(u)$ , quand  $u \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  :

$$(3.15a) \quad w(u_{n_1(u)}, u_{n_1(v)}) = O(1). w(u_{n_2(u)}, v_{n_2(u)}) \rightarrow c_2/c_1^2.$$

$$(3.15b) \quad w(u_{n_2(u)}, u_{n_1(v)}) = O(1) + w(u, u^\delta) \rightarrow c_2/c_1^2.$$

Par contre, l'extension devant donner

$$(3.16) \quad w(u) = w(u, u^\delta) + O(1)$$

présente une difficulté que nous allons lever. En effet, on a  $|w(u) - w(u, u^\delta)| \leq R_1 + R_2 + R_3$ , avec d'abord,  $R_1 = u^{\delta-1} \{Q(1-u^\delta) - Q(1-u)\} r(u^\delta) \rightarrow 0$  à cause de (3.14). Puisque  $u(j+1) = u(j)^\delta, j \geq 1, \{r(u(j+1)), r(u(j)), u(j+1)\}, j \in \mathbb{N}$  est borné, on obtient

$$R_2 \leq \text{Const.} u^{\delta-1} \sum_{j=1}^{\infty} u(j-1) < \text{Const.} u^{\delta-1} \rightarrow 0 \text{ quand } u \rightarrow 0.$$

Enfin,  $R_3$  est traité identiquement à (3.13), i. e.,

$$R_3 \leq \text{Const.} u^{\delta-1} \sum_{j=1}^{\infty} u_0^{(\delta^{j-1}-1)\delta} \rightarrow 0, \text{ quand } u \rightarrow 0.$$

En appliquant successivement le lemme 2 à (3.11a) et (3.15a), à (3.11 b) et (3.15b) puis enfin à (3.12) et (3.16), nous obtenons la deuxième partie de (3.8).

*Deuxième étape.* Elle consiste à prouver que

$$(3.17) \quad R(x) \rightarrow c_2 \text{ et } R(x)/w(x)^{1/2} \rightarrow c_1 \text{ quand } x \rightarrow x_0.$$

Démontrons d'abord que

$$(3.18) \quad \lim_{u \rightarrow 0} r(u) = \chi, 0 \leq \chi < \infty \Rightarrow y - Q(1-v) \rightarrow 0 \text{ quand } 1 - G(y) = v \rightarrow 0.$$

*Preuve de (3.18).* Soit  $1 - G(y) = v$ . Si  $Q(1-v) = y$ , il n'y a rien à faire. Supposons donc que  $Q(1-v) \neq y$ . Donc  $Q(1-v) < y$  et  $G(t) = 1-v$  pour tout  $t \in [Q(1-v), y]$  si bien que

$$(3.19) \quad \left( \int_{Q(1-v)}^{y_0} 1 - G(t) dt \right) / v = y - Q(1-v) + \left( \int_y^{y_0} 1 - G(t) dt \right) / v.$$

En utilisant les suites obtenues au (3.8), on a

$$(3.20) \quad (v/u_{n_1(v)})r(u_{n_1(v)}) \leq \frac{1}{v} \int_y^{y_0} 1 - G(t) dt \leq (v/u_{n_2(v)})r(u_{n_2(v)}).$$

En mettant ensemble (3.19) et (3.20), on prouve (3.18)

*Preuve de (3.17).* Maintenant, (3.18) et (3.19) impliquent

$$(3.21) \quad r(u) - R(x) = O(1) \text{ quand } 1 - G(x) = u \rightarrow 0.$$

De manière analogue à (3.19), on a

$$(3.22) \quad w(v) = w(y) + \frac{1}{2}(y - Q(1-v))^2 + (y - Q(1-v)) = w(y) + O(1) \\ \text{quand } 1 - G(y) = v \rightarrow 0.$$

En combinant la remarque du (3.8) avec (3.21) et (3.22), on prouve (3.17). En conclusion, si  $R(x) \rightarrow c_2 = 1/\gamma$ ,  $0 < \gamma < \infty$ , alors  $F \in D(\varphi_\gamma)$  d'après le lemme 1 dans Mason (1982). Si  $w(x)/R(x)^{1/2} \rightarrow c_2 = 1$ , alors  $F \in D(\Lambda)$  d'après le Théorème 2.5.2. de De Haan (1970). Si  $w(x)/R(x)^{1/2} \rightarrow c_2$ ,  $1 < c_2 < \sqrt{2}$  et si  $y_0 < \infty$ , alors  $F \in D(\varphi_\gamma)$ ,  $\gamma = -2 - c_2^2/(c_2^2 - 1)$ .

Pour finir entièrement la preuve, il faut montrer que l'hypothèse  $y_0 < \infty$  est redondante dans le théorème 2.6.1. de De Haan (1970). Ceci s'obtient néanmoins sans grandes difficultés.

b) *Démonstration du théorème 2.* Elle suit les grandes lignes de celle du théorème 1. Le détail sera donc omis. Néanmoins nous présentons les correspondances entre les deux preuves.

i) Les implications directes du théorème 1 reposent sur les propriétés découlant de l'appartenance de  $G(x) = F(e^x)$  à  $D(\Lambda) \cup D(\psi)$  dès que  $F \in \Gamma$ . De même, si  $\tau > 0$ ,  $G_\tau(x) = 1 - (1 - G(x))^\tau \in D(\Lambda) \cup D(\psi)$  dès que  $F \in \Gamma$  en vertu du

LEMME 3 [Csörgo-Mason (1984), Lô(1991)]. — *On a les propriétés suivantes*  
 $(F \in D(\varphi_\alpha), \alpha > 0) \iff (G_\tau \in D(\Lambda) \text{ et } r(x, G_\tau) \rightarrow 1/(\tau\alpha) \text{ quand } x \uparrow y_0).$

$$(F \in D(\Lambda)) \iff (G_\tau \in D(\Lambda) \text{ et } r(x, G_\tau) \rightarrow 0 \text{ quand } x \uparrow y_0).$$

$$(F \in D(\psi_\gamma), \gamma > 0) \iff (G_\gamma \in D(\psi_{\gamma\tau}) \text{ et } r(x, G_\tau) \rightarrow 0 \text{ quand } x \uparrow y_0).$$

ii) De même que les implications retour du théorème 1 reposent sur d'une part sur le fait que (2.1) implique (3.17) et sur les théorèmes de de Haan (1970) ci-dessus cités, les implications du théorème 2 aussi découlent de l'implication de

$$R(x, G_\tau) \rightarrow c_2 \text{ et } R(x, G_\tau)/R(x, G_\rho) \rightarrow c_1 \text{ quand } x \rightarrow y_0$$

par (2.2) et de la généralisation du théorème 2.8.1 de De Haan (1970) proposée et démontrée dans l'appendice.

#### 4 - SIMULATIONS

Il est notoirement connu dans le domaine des valeurs extrêmes ou l'estimateur de Hill joue un rôle très important que la convergence de celui-ci pour les différents domaines est lente car est de l'ordre de  $\log n$ , quand  $n \uparrow \infty$ . Notre statistique  $T_n$  joue un rôle d'index extremal caractérisant chaque domaine. La convergence est encore très faible pour des échantillons moyens (de 50 à 150). Dans nos simulations, la distribution de Paréto de paramètre  $\gamma$  (en abréviation *Par*  $\alpha$ ) représente la classe  $D(\Phi_\gamma)$ , la loi exponentielle de moyenne unité (*Expo* 1) représente la classe  $D(\Lambda)$  tandis que la classe de distribution  $F_\gamma^{-1}(1-u) = 1 - u^{1/\gamma}$  (*Weib*  $\gamma$ ) représente le domaine de Weibull  $D(\psi_\gamma)$ . La table 1 de l'appendice 1 expose les erreurs quadratiques moyennes relatives des estimateurs du théorème 1 [(1) pour  $T_n(2)$ , (2) pour  $A_n$  et (3) pour  $T_n(1)$ ] avec les lois exponentielle standard (*Expo* 1), de Paréto de paramètre 1 (*Par* 1) et du type *Weib* 1. Elles sont généralement mauvaises sauf pour la loi *Weib* 1 pour laquelle  $T_n(1)$  converge très vite pour de petits échantillons. ce fait est généralement bien connu et accepté. En alternative, la famille statistique introduite dans le théorème 2 permet d'obtenir d'excellentes convergences pour de petits échantillons. La table 3 expose les erreurs quadratiques moyennes (EQM) des convergences des  $S_n(\tau)$  pour différentes valeurs de  $\tau$  et de  $n$  avec les lois (1) *Expo* 1, (2) *Par* 1 et (3) *Weib* 1. Pour (1) et (3), la limite est zéro. La table met en évidence le rôle de  $\tau$  dans la convergence. En effet, sur un plan théorique,  $S_n(\tau)$  est asymptotiquement inversement proportionnelle à  $\tau$ . La table montre que sur le plan pratique, pour de petits échantillons, la multiplication de  $\tau$  par 20, par exemple, rapproche l'estimateur de zéro d'un facteur proportionnel à  $10^{-3}$ . Pour (2), la limite de l'estimateur est  $1/\tau$ . Un regard sur les colonnes de  $\tau = 10$  et  $\tau = 20$  montre que les EQM sont très bonnes relativement à  $\tau$ . La table 2 vient confirmer que les vitesses obtenues sont valables pour un large éventail de valeurs  $\alpha$  du paramètre de la loi de Paréto. Les mêmes conclusions sont aussi bonnes pour la variabilité du paramètre de la loi du domaine Weibull.

*Nous recommandons donc l'utilisation des estimateurs  $S_n(\tau)$  pour des valeurs relativement grandes, de 5 à 15, lorsque les échantillons sont petits ( $n$  allant de 30 à 200).*

La table 4 expose les simulations de l'estimateur  $\mathbb{I}_n = S_n(\tau)/S_n(\eta\tau)$ . D'après le théorème 2,  $\mathbb{I}_n/s_2 - 1 \rightarrow 0$ . Les EQM de cette convergence, telles que listées dans la table 4, supportent fortement les résultats théoriques pour des valeurs de  $\eta$  très proches de 1.

*Nous recommandons aussi une utilisation de  $\mathbb{I}_n$  pour des valeurs de  $\eta$  s'écartant de 1 au maximum de 5 centièmes.*

En conclusions, la classe  $S_n(\tau)$  permet une grande souplesse dans les applications statistiques comparée à beaucoup d'estimateurs de l'index d'une loi extrême qui souvent sont définitivement bons pour certaines situations et moins bonnes pour d'autres. L'utilisateur intéressé peut faire des simulations intensives dans ses conditions de travail (taille des échantillons, valeurs grossières des paramètres  $\alpha$ ) et soumettre ses données à ces simulations pour obtenir des directions de travail.

Il reste entendu que la deuxième étape consisterait à faire des tests statistiques pour parachever le travail. Les normalités asymptotiques des estimateurs étudiés ici sont déjà obtenues. Dans un prochain article, des simulations relatives à ces tests seront exposées et appliquées à des données réelles.

## APPENDICE 1. TABLEAUX DES SIMULATIONS

$n$	estim	Par 1	Exp 1	Weib 1
50	(1)	.18	1.04	.656
	(2)	.74	.75	.279
	(3)	1.08	.22	.0609
100	(1)	.11	.97	.57
	(2)	.78	.66	.23
	(3)	1.28	.21	.05

Tab 1

$\alpha$	.05	.1	1	2	5	10
$n$						
50	.0508	.0235	.0022	.0013	.0005	.0003
100	.0217	.0106	.0010	.0007	.0003	.0001
150	.0135	.0071	.0007	.0004	.0001	.0001

Tab 2

$\tau$	1	5	10	15	Lois
50	.76	.0522	.0054	.0004	(1)
	.74	.028	.0024	.0002	(2)
	.48	.0404	.0045	.0003	(3)
100	.63	.0335	.0019	.0002	(1)
	.63	.0201	.0010	.00009	(2)
	.39	.0246	.0014	.00015	(3)
150	.56	.0247	.0011	.00008	(1)
	.57	.0167	.0007	.00004	(2)
	.33	.0173	.0004	.00006	(3)

Tab 3

$\eta$	.8	.9	.98	.99	Lois
50	.53	.31	.071	.036	(1)
	.52	.32	.074	.038	(2)
	.54	.32	.072	.038	(3)
75	.55	.33	.078	.04	(1)
	.56	.34	.08	.04	(2)
	.56	.34	.079	.04	(3)
100	.5	.35	.08	.04	(1)
					(2)
					(3)

Tab 4

Légende : (1) = loi exponentielle, (2)=loi de paréto, (3)= loi du domaine de Weibull représenté par  $F^{-1}(1-u) = 1 - u^{1/\gamma}$ .

REMERCIEMENTS Nous remercions l'arbitre dont les critiques nous ont donné l'opportunité de donner une bibliographie plus large de l'estimation des domaines d'attraction extrémales, de corriger certaines erreurs et surtout de lever l'ambiguïté de la dénomination du type III extrémal de Weibull.

#### BIBLIOGRAPHIE

- Csörgö, S.(1984). "Adaptive estimation of the parameters of stable laws". In *Limit Theorems in Probability and Statistics* (ed. P. Révész), pp. 305-368. *Colloquia soc. J. Bolyai*, n° 36 (North-Holland)
- Csörgö, S., Deheuvels, P et Mason, D.M. (1985). "Kernel estimates for the tail of a distribution". *Ann Statist.* **13**, 1050-1077.
- Csörgö, S et Mason, D.M.(1985). "Central limit theorems for sums of extreme values". *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **98**, 547-558.
- Davis, R et Resnick, S(1984). "Tail estimates motivated by extreme value theory". *Ann. Statist.* **12**, 1467-1487.
- De Haan, L. (1970). "On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes". *Mathematical centre Tracts*, **32**, Amsterdam.

- De Haan, L. et Resnick, S. (1980). "A simple asymptotic estimate for the index of a stable distribution". *J. Roy. Statist. Soc. B* **42**, 83–87
- Dekkers, A.L.M, Einmahl, J.H.J. et de Haan, L.(1970). "A moment estimator for the index of an extreme-value distribution". *Ann. Statist.*, **17**, 1833–1855.
- Einmahl, J.H.J. et Mason, D.M. (1986). "Laws of the iterated logarithm in the tails for weighted uniform empirical process". *Ann. Probab.* **16**, 126–141.
- Galambos, J. (1985). *The asymptotic theory of Extreme Order Statistics*. Wiley, Nex-York.
- Hasofer A.M. et Wang. Z.(1992). "A test for extreme value domain of attraction". *J. Amer. Statist. Assoc.* vol **57**, n<sup>o</sup> 717, Theory and Method, 171–177.
- Hill B. (1975). "A simple general approach to the inference about the tail index of a distribution". *Ann. Statist.* **3**, 1163–1174.
- Lô, G.S.(1986). *Thèse de doctorat Unique*. Université de Paris 6.
- Lô, G.S.(1991). *Empirical characterization of the extremes : I & II*. Technical reports **123**, LSTA, Université de Paris VI.
- Lô, G.S.(1992). "Sur la caractérisation empirique des extrêmes". *Comptes Rendus Math., Acad. Sci. Canada*. Vol XIV, n<sup>o</sup> 2,3, April- June, 89-94.
- Mann, N.R.(1983). "Statistical estimation of Parameters or the Weibull and Frechet Distribution". In *Statistical Extremes and applications*. (Tiago de Oliveira Ed.), D. Reidel Publishing Company, 81–90
- Mason, D.M.(1982). "Laws of large numbers for sums of extrem values". *Ann. Probab.* **10**; 754–764.
- Resnick, S.I.(1987). *Extreme Values, Regular variation and Point Processes*. Springer-Verbag, New-York.
- Smith, R.L.(1987). "Estimating tail of probability distribution". *Ann. Statist.* **15**, 1174–1207.
- Tiago de Oliveira, J. (1983). "Univariate extremes : statistical choice". In *Statistical extremes and applications* (J. Tiago de Oliveira Ed.), D. Reidel Publishing Company, 91–108.
- Tiago de Oliveira, J. Edition. (1983). "Statistical Extremes and Applications". *Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on statistical Extremes and Applications*. Vimeiro, Portugal. D. Reidel Publishing Company.

## APPENDICE 2 : PREUVE DE LA GENERALISATION DU THEOREME 2.8.1. DE DE HAAN (1970).

THÉOREME. — *Les propositions suivantes sont vraies.*

$$1) F \in D(\Lambda) \cup D(\varphi_\gamma) \iff r(\tau, G, x)/r(\rho, G, x) \rightarrow \rho/\tau.$$

$$2) (F \in D(\psi_\gamma), \gamma > 0) \iff r(\tau, G, x)/r(\rho, G, x) \rightarrow (\gamma\rho + 1)/\gamma\tau + 1).$$

PREUVE. La partie 1) se prouve en combinant le théorème 2.8.1. de De Haan (1970) et les propositions 1) et 2) du lemme 3. Il nous reste à prouver la dernière partie. Pour des raisons pratiques, faisons  $\rho = \tau - 1 > 0$ . Le cas général se fait de la même manière. Supposons que  $F \in D(\psi_\gamma)$ . D'après la partie 1) du lemme 3, pour tout  $\tau > 0$ ,  $F_\tau = 1 - (1 - F)^\tau \in D(\psi_{\gamma\tau})$ . D'après (2-6-4) dans De Haan (1970).

$$F \in D(\psi_\gamma) \Rightarrow R(F, x) \sim (x_0 - x)/(\gamma + 1) \text{ quand } x \rightarrow x_0 < \infty. \quad (a1)$$

Donc

$$\frac{r(\tau, F, x)}{r(\rho, F, x)} \sim \frac{x_0 - x}{\gamma\tau + 1} \times \frac{\gamma\rho + 1}{x_0 - x} = \frac{\gamma\rho + 1}{\gamma\tau + 1}. \quad (a2)$$

Ce qui prouve le sens direct.

Pour démontrer le sens direct, nous modifions la preuve de Resnick (1987) du point 1) de ce lemme. En effet, posons,

$$r(x) = \frac{\int_x^{x_0} (1 - F(t))^\tau dt}{(1 - F(x)) \int_x^{x_0} (1 - F(t))^{\tau-1} dt} =: \frac{r(\tau, F, x)}{r(\tau - 1, F, x)} \quad (a3)$$

Supposons que  $r(x) \rightarrow \frac{\gamma(\tau-1)+1}{\gamma\tau+1}$  quand  $x \rightarrow x_0$ .

Posons  $1 - F_4(x) = \frac{\int_x^{x_0} (1 - F(t))^\tau dt}{\int_x^{x_0} (1 - F(t))^{\tau-1} dt}$ . On a

$$(1 - F_4(x))' = \frac{1 - F(x)}{r(\tau - 1, F, x)} (r(x) - 1) < 0, \quad (a4)$$

pour  $x$  proche de  $x_0$ .  $F_4$  est donc la queue d'une fonction de répartition. Il est aisé de vérifier que  $d(-\log(1 - F_4(x)))/dx = \frac{h(x)}{f(x)}$  où  $h(x) = (1 - r(x))(1 - F(x))^\tau / (1 - F_4(x))^\tau$

et  $f(x) = \left\{ \int_x^{x_0} (1 - F(t))^\tau dt \right\} / (1 - F_4(x))^\tau$ .

Un calcul direct montre que

$$h(x) = \frac{\gamma}{(\gamma\tau + 1)} \left( \frac{\tau\gamma + 1}{\gamma\tau + 1 - \gamma} \right)^\tau + O(1) =: \beta_1 + O(1), \text{ quand } x \rightarrow x_0, \quad (a5)$$

où  $\beta_1$  est réel positif et que

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\left(\frac{\gamma\tau+1}{\gamma\tau+1-\gamma}\right)^\tau + \tau\left(\frac{\gamma\tau+1-\gamma}{\gamma\tau+1}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma\tau+1}\right)\left(\frac{\gamma\tau+1}{\gamma\tau+1-\gamma}\right)^{\tau+1} + O(1) \\ &= \left(\frac{\gamma\tau+1}{\gamma\tau+1-\gamma}\right)^\tau \left(\frac{-1}{\gamma\tau+1}\right) + O(1) \rightarrow -\beta < 0, \text{ quand } x \rightarrow x_0 \end{aligned} \quad (a6)$$

Montrons maintenant que  $x_0$  est nécessairement fini. D'après (a6)

$$\forall \varepsilon, 0 < 2\varepsilon < \beta, \exists x_1 > 0, \forall x > x_1, -\beta - \varepsilon < f'(x) < -\beta + \varepsilon. \quad (a7)$$

En intégrant entre  $x_1$  et  $x$ , puis en faisant  $x \rightarrow x_0 = +\infty$ , on obtient

$$\forall \varepsilon, 0 < 2\varepsilon < \beta, \exists x_1 > 0, \forall x > x_1, (-\beta - \varepsilon)(x - x_1) \leq f(x) - f(x_1) \leq (-\beta + \varepsilon)(x - x_1). \quad (a8)$$

En divisant cette formule par  $x$ , puis en faisant  $x \rightarrow x_0 = +\infty$ , on obtient

$$\forall \varepsilon, 0 < 2\varepsilon < \beta, \exists x_1 > 0, \forall x > x_1, -\beta - 2\varepsilon \leq \frac{f(x)}{x} < -\beta + 2\varepsilon. \quad (a9)$$

ce qui est impossible car  $f$  serait strictement négatif. Donc  $x_0 < \infty$ . Par conséquent  $1 - F_4(x_0) = 0$ . Or

$$\forall z < x < x_0, 1 - F_4(x) = C \exp\left(\int_z^x \frac{h(t)}{f(t)} dt\right). \quad (a10)$$

D'où  $1 - F_4(x_0) = C \exp \int_z^{x_0} \frac{h(t)}{f(t)} dt = 0$  et donc  $\int_z^{x_0} \frac{h(t)}{f(t)} dt = -\infty$ . Il s'en suit que pour tout  $z > 0$ ,  $\inf_{z \leq x \leq x_0} f(x) = 0$ , car  $h$  est bornée. Ceci conduit au fait  $f(x_0) = 0$  à cause de la continuité de  $f$ . En combinant (a5), (a6) et le fait que  $f(x_0) = 0$ , on aboutit à

$$\frac{h(t)}{f(t)} = (\beta_1 + b_1(t)) \left( \frac{1}{-\beta(x_0 - t)} + \frac{b_2(t)}{\beta(x_0 - t)} \right), \quad (a11)$$

où  $b_i(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow x_0$ ,  $i = 1, 2$ .

En posant enfin,  $1 - F^*(x) = 1 - F_4(x_0 - 1/x) = C \exp\left(-\int_{x_0}^{x_0-1/x} \frac{h(t)}{f(t)} dt\right)$ , et ayant noté que  $-\beta_1/\beta = \gamma$ , on arrive à, pour  $\lambda > 0$ ,  $x$  proche de  $x_0$ ,

$$(1 - F^*(\lambda x))/(1 - F^*(x)) = \left\{ \exp\left(\int_{x_0-1/x}^{x_0-1/(\lambda x)} \frac{-\gamma}{x_0 - t} dt\right) \right\} \left\{ \exp\left(\int_{x_0-1/x}^{x_0-1/\lambda x} \frac{b(t)}{x_0 - t} dt\right) \right\},$$

où  $b(t) = (-b_1(t) + b_2(t))/\beta \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow x_0$ . Ceci permet de voir aisément que  $F_4 \in D(\psi_\gamma)$  et donc que  $F \in D(\psi_\gamma)$ ,  $(1 - F_4)/(1 - F)$  tend vers  $\frac{\gamma(\tau-1)+1}{\gamma\tau+1}$  quand  $x \rightarrow x_0$  en vertu de (a2) et (a3).